ARITHMETIC PROGRESSION
समान्तर श्रेढी

वह श्रेणी समान्तर या अंकगणितीय श्रेढी कहलाती है जो एक समान राशि से लगातार बढ़ती या घटती हो। यह समान राशि किन्हीं दो क्रमागत पदो का अन्तर होता है जिसे पदांतर (common difference) कहते है। इस पदांतर को 'd' से प्रदर्शित करते है। जैसे-

श्रेणी 1, 3, 5, 7, 9 मे पदांतर(d) +2 है (3-1 = 5-3 = 9-7 = +2)

श्रेणी 16, 14, 12, 10, 8 मे पदांतर(d) -2 है (14-16 = 12-14 = 8-10 = -2)

- ***Finding the n^{th} term of an arithmetic progression where n is any positive integer***

  समान्तर श्रेढी का nवां पद ज्ञात करना जहां कि n कोई धनात्मक पूर्णांक है

समान्तर श्रेढी के पदो(Terms) को T से प्रदर्शित करते है (प्रथम पद को T_1 से, दूसरे पद को T_2 से, n^{th} पद को T_n से इत्यादि) एवं पदांतर (common difference) को d से प्रदर्शित करते है। मान ले $T_1 = a$, तब

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_n
a	a+d	a+2d	a+3d	a+4d	
a	a+(2-1)d	a+(3-1)d	a+(4-1)d	a+(5-1)d	a+(n-1)d

n वां पद (T_n) निकालने का सूत्र

$$T_n = a + (n-1)\,d$$

Where,

T_n = N^{th} Term

a = First Term

d = common difference

- ***Finding the sum of n terms of an arithmetic progression***

  समान्तर श्रेढी के n पदो का योग ज्ञात करना

यदि श्रेढी के पदो की संख्या परिमित (finite) हो, तो उसके प्रथम न पदो का योग-मान मे अन्तिम पद । है।

$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots\dots\dots\dots + (l-2d) + (l-d) + l$

पदो को विपरीत क्रम मे लिखने पर,

$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \dots\dots\dots\dots + (a+2d) + (a+d) + a$

दोनों श्रेढ़ीयों को ज़ोरने पर,

$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots\dots\dots\dots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$

$= n(a+l)$, (where number of terms is 'n')

So,

$$S_n = \frac{N}{2}(a + l),$$ (where $l = T_n = a + (n-1)\,d$

$$S_n = \frac{N}{2}[a + a + (n-1)d],$$

$$S_n = \frac{N}{2}[2a + (n-1)d],$$

ILLUSTRATIONS

Problem 1

श्रेणी 10, 8, 6, 4,......का 6वाँ तथा 19वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 6th and 19th term of the series 10, 8, 6, 4,.....

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 10$ तथा सार्व अन्तर, $d = 8 - 10 = -2$ है।

nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow$ $T_6 = 10 + (6 - 1) \times (-2) = 10 - 10 = \mathbf{0}$

तथा $T_{19} = 10 + (19 - 1) \times (-2)$

$= 10 + 18 \times (-2) = 10 - 36 = \mathbf{-26}$

Problem 2

श्रेणी 3, 7, 11, 15,.....का 10वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात करो।

Find the 10th and nth term of the series 3, 7, 11, 15,......

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 3$ तथा सार्व अन्तर, $d = 7 - 3 = 4$ है।

nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \times 4$

$= 3 + 4n - 4 = \mathbf{4n - 1}$

तथा $T_{10} = 3 + (10 - 1) \times 4$

$= 3 + 9 \times 4 = 3 + 36 = \mathbf{39}$

Problem 3

श्रेणी 1, –2, –5, –8,.....का 31वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात करो।

Find the 31st and nth terms of the series 1, – 2, – 5, – 8, ...

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 1$ तथा सार्व अन्तर, $d = -2 - 1 = -3$ है।

nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$= 1 + (n - 1)(-3)$

$= 1 - 3n + 3 = \mathbf{4 - 3n}$

तथा $T_{31} = 1 + (31 - 1)(-3)$

$= 1 + 30 \times (-3) = 1 - 90 = \mathbf{-89}$

Problem 4

श्रेणी $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, ...$ का 12वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 12th term of the series $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, ...$

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = \frac{1}{3}$ तथा सार्व अन्तर, $d = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ है।

nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow$ $T_{12} = \frac{1}{3} + (12 - 1)\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{3} + \frac{11}{3} = \frac{1 + 11}{3} = \frac{12}{3} = \mathbf{4}$

Problem 5

श्रेणी $2, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, ...$ का 8वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात करो।

Find the 8th and nth terms of the series $2, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, ...$

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 2$,

सार्वअन्तर, $d = \frac{7}{6} - 2 = \frac{7 - 12}{6} = -\frac{5}{6}$

nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$= 2 + (n - 1)\left(-\frac{5}{6}\right)$

$= 2 - \frac{5n}{6} + \frac{5}{6}$

$= \frac{12 - 5n + 5}{6} = \mathbf{\frac{17 - 5n}{6}}$

$\Rightarrow$ $T_8 = \frac{17 - 5 \times 8}{6} = \frac{17 - 40}{6} = \mathbf{\frac{-23}{6}}$

Problem 6

समान्तर श्रेढी 1, 4, 7, ... का कौन-सा पद 55 होगा ?

Which term of the A.P. 1, 4, 7....is 55 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 1$ तथा सार्व अन्तर, $d = 4 - 1 = 3$ है।

मान लो nवाँ पद 55 है।

अतः $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow$ $55 = 1 + (n - 1) \times 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$

$\Rightarrow$ $3n = 55 + 2 = 57$

$\therefore$ $n = \frac{57}{3} = 19$

$\therefore$ 55 इस श्रेढी का 19वाँ पद है।

Problem 7

स. श्रे. 7, 10, 13,.....का कौन-सा पद 151 होगा ?

Which term of the A.P. 7, 10, 13,......is 151 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 7$ तथा सार्व अन्तर, $d = 10 - 7 = 3$ है।
माना कि nवाँ पद 151 है।

अतः $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad 151 = 7 + (n - 1) \times 3 = 7 + 3n - 3 = 3n + 4$

$\Rightarrow \quad 3n = 151 - 4 = 147$

$\therefore \quad n = \frac{147}{3} = 49$

$\therefore$ 151 इस श्रेढी का 49वाँ पद है।

Problem 8

श्रेणी $99 + 92 + 85 + ...$का कौन-सा पद 15 होगा ?
Which term of the series $99 + 92 + 85 + ...$is 15 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 99$ तथा सार्व अन्तर, $d = 92 - 99 = -7$ है।
माना कि nवाँ पद 15 है।

अतः $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad 15 = 99 + (n - 1)(-7) = 99 - 7n + 7$
$= 106 - 7n$

$\Rightarrow \quad 7n = 106 - 15 = 91$

$\therefore \quad n = \frac{91}{7} = 13$

इस प्रकार, 15 इस श्रेढी का 13वाँ पद है।

Problem 9

स. श्रे. 5, 14, 23,.....का कौन-सा पद 239 होगा ?
Which term of the A.P. 5, 14, 23,......is 239 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 5$ तथा सार्व अन्तर, $d = 14 - 5 = 9$ है।
मानाकि nवाँ पद 239 है।

अतः $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad 239 = 5 + (n - 1) \times 9 = 5 + 9n - 9 = 9n - 4$

$\Rightarrow \quad 9n = 4 + 239 = 243$

$\therefore \quad n = \frac{243}{9} = 27$

इस प्रकार, 239 इस श्रेढी का 27वाँ पद है।

Problem 10

क्या 128 श्रेणी $6 + 11 + 16 + ...$का कोई पद है ?
Is 128 a term of the series $6 + 11 + 16 + ...$?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 6$ तथा सार्व अन्तर, $d = 11 - 6 = 5$ है।
माना कि nवाँ पद 128 है।

अतः $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad 128 = 6 + (n - 1) \times 5 = 6 + 5n - 5 = 5n + 1$

$\Rightarrow \quad 5n = 128 - 1 = 127$

$\therefore \quad n = \frac{127}{5} = 25.4$

क्योंकि n का मान धनात्मक पूर्णांक नहीं है अतः 128 इस श्रेढी का पद नहीं है।

Problem 11

किसी स. श्रे. के 9वें तथा 19वें पद क्रमशः 35 और 75 हैं तो श्रेणी ज्ञात कीजिए। 20वाँ पद भी बताइए।
The 9th and 19th terms of a series in A.P. are respectively 35 and 75. Find the series and its 20th term.

Solution

मान लो, श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्व अन्तर d है।

अतः nवाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad T_9 = a + (9 - 1)d = a + 8d$

$\Rightarrow \quad a + 8d = 35 \quad ...(1)$

तथा $T_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$

$\Rightarrow \quad a + 18d = 75 \quad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए समीकरण (1) को समीकरण (2) में से घटाने पर,

$$\begin{array}{r} a + 18d = 75 \\ a + 8d = 35 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 10d = 40 \end{array}$$

$\therefore \quad d = \frac{40}{10} = 4 \quad ...(3)$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a + 8 \times 4 = 35$

$\Rightarrow \quad a + 32 = 35$

$\therefore \quad a = 35 - 32 = 3$

अतः श्रेणी का 20वाँ पद होगा—

$T_{20} = a + (20 - 1)d$
$= 3 + 19 \times 4 = 3 + 76 = 79$

वांछित समान्तर श्रेढी होगी—
$3, 3 + 4, 3 + 2 \times 4, ...$
अर्थात् 3, 7, 11, ...

Problem 12

उस स. श्रे. का सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद 5 तथा 11वाँ पद -5 हो।
Find the common difference of an A.P. whose first term is 5 and 11th term is -5.

Solution

माना कि श्रेढी का सार्वन्तर d है। अतः

11वाँ पद, $T_{11} = a + (11 - 1) \times d$

$\Rightarrow \quad -5 = 5 + 10 \times d$

$\Rightarrow \quad 10d = -5 - 5 = -10$

$\therefore \quad d = \frac{-10}{10} = -1$

Problem 13

यदि किसी स. श्रे. का 11वाँ पद 44 तथा 16वाँ पद 19 हो तो 20वाँ पद तथा स. श्रे. ज्ञात करो।
If the 11th term of an A.P. is 44 and 16th term is 19, find the 20th term and the A.P.

Solution

मान लो श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।

अतः nवाँ पद, $T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad T_{11} = a + (11-1)d = a + 10d$

$\Rightarrow \quad a + 10d = 44$ ...(1

तथा $\quad T_{16} = a + (16-1)d = a + 15d$

$\Rightarrow \quad a + 15d = 19$ ...(2

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$\begin{array}{r} a + 10d = 44 \\ a + 15d = 19 \\ - \quad - \quad - \\ \hline -5d = 25 \end{array}$$

$\therefore \quad d = \frac{25}{-5} = -5$ ...(3

d के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$a + 10 \times (-5) = 44$

$\Rightarrow \quad a - 50 = 44$

$\therefore \quad a = 50 + 44 = 94$ ...(4

अतः श्रेढी का 20वाँ पद होगा—

$T_{20} = a + (20-1)d$

$= 94 + 19 \times (-5) = 94 - 95 = -1$

वांछित समान्तर श्रेढी होगी—

$94, 94 + (-5), 94 + 2(-5), \ldots\ldots$

अर्थात् $94, 89, 84, \ldots\ldots$

Problem 14

स.श्रे. 3, 5, 7,....., 51 का माध्य पद ज्ञात करो।

Find the middle term of the arithmetic progression 3, 5, 7,....51.

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 3$, अन्तिम पद, $l = 51$ तथा सार्व अन्तर, $d = 5 - 3 = 2$ है। अतः

$l = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 51 = 3 + (n-1) \times 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$

$\Rightarrow \quad 2n = 51 - 1 = 50$

$\therefore \quad n = \frac{50}{2} = 25$

माध्य पद $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद

$= \frac{25+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{26}{2}$वाँ पद $= 13$वाँ पद

$T_{13} = a + (13-1)d$

$= 3 + 12 \times 2 = 3 + 24 = 27$

Problem 15

k का मान बताओ यदि 5, k, 11 स.श्रे. में हों।

Find the value of k if 5, k, 11 are in A.P.

Solution

यदि 5, k, 11 स.श्रे. में हैं तो

$k - 5 = 11 - k$

$\Rightarrow \quad k + k = 11 + 5$

$\Rightarrow \quad 2k = 16$

$\therefore \quad k = \frac{16}{2} = 8$

प्रश्नावली 1(B)

Problem 1

निम्नलिखित श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए :

Find the sum of following series :

(i) $2 + 5 + 8 + \ldots\ldots$ 31 पदों तक (upto 31 terms)।

(ii) $-6 - 2 + 2 + \ldots\ldots$ 21 पदों तक (upto 21 terms)।

(iii) $-3 + 3 + 9 + 15 + \ldots\ldots$ 16 पदों तक (upto 16 terms)।

(iv) $7, \frac{25}{3}, \frac{29}{3}, 11, \ldots\ldots$ 12 पदों तक (upto 12 terms)।

(v) $\sqrt{3} + \sqrt{3}(1-\sqrt{3}) + \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) + \ldots$ 21 पदों तक (upto 21 terms)।

(vi) $3\frac{1}{2} + 7 + 10\frac{1}{2} + \ldots\ldots$ 17 पदों तक (upto 17 terms)।

(vii) $2 + 3\frac{1}{2} + 5 + 6\frac{1}{2} + \ldots\ldots$ 25 पदों तक (upto 25 terms)।

Solution

(i) $\quad S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$,

यहाँ $\quad a = 2, d = 5 - 2 = 3, n = 31$

$\Rightarrow \quad S_{31} = \frac{31}{2}[2 \times 2 + (31-1) \times 3]$

$= \frac{31}{2}(4 + 30 \times 3) = \frac{31}{2}(4 + 90) = \frac{31 \times 94}{2} = 1457$

(ii) यहाँ प्रथम पद, $a = -6$,

सार्वअन्तर $\quad d = -2 - (-6) = -2 + 6 = 4$

n पदों का योगफल

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad S_{21} = \frac{21}{2}[2 \times (-6) + (21-1) \times 4]$

$= \frac{21}{2}[-12 + 20 \times 4]$

$= \frac{21}{2}[-12 + 80] = \frac{21 \times 68}{2} = 714$

(iii) यहाँ $\quad a = -3, d = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

सूत्र : $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

सूत्र में मान रखने पर 16 पदों का योग,

$$S_{16} = \frac{16}{2}[2 \times (-3) + (16-1) \times 6]$$
$$= 8[-6 + 15 \times 6]$$
$$= 8[-6 + 90] = 8 \times 84 = 672$$

(iv) यहाँ प्रथम पद, $a = 7$, सार्व अन्तर, $d = \frac{25}{3} - 7 = \frac{25-21}{3} = \frac{4}{3}$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$\Rightarrow \quad S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 7 + (12-1) \times \tfrac{4}{3}]$$
$$= 6\left[14 + \frac{11 \times 4}{3}\right]$$
$$= 6\left[\frac{42+44}{3}\right] = \frac{6 \times 86}{3} = 2 \times 86 = 172$$

(v) यहाँ $a = \sqrt{3}, d = (\sqrt{3} - 3) - \sqrt{3} = -3$

n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$\Rightarrow \quad S_{21} = \frac{21}{2}[2 \times \sqrt{3} + (21-1) \times (-3)]$$
$$= \frac{21}{2}[2\sqrt{3} - 60]$$
$$= \frac{21 \times 2\sqrt{3}}{2} - \frac{21 \times 60}{2}$$
$$= 21\sqrt{3} - 21 \times 30 = 21(\sqrt{3} - 30)$$

(vi) यहाँ प्रथम पद, $a = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

सार्व अन्तर, $d = 7 - \frac{7}{2} = \frac{14-7}{2} = \frac{7}{2}$

सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$\Rightarrow \quad S_{17} = \frac{17}{2}\left[2 \times \frac{7}{2} + (17-1) \times \frac{7}{2}\right]$$
$$= \frac{17}{2}\left[7 + \frac{16 \times 7}{2}\right]$$
$$= \frac{17}{2}[7 + 56] = \frac{17 \times 63}{2} = \frac{1071}{2}$$

(vii) यहाँ प्रथम पद, $a = 2$, सार्व अन्तर, $d = 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

n पदों के योग का सूत्र :

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad S_{25} = \frac{25}{2}\left[4 + \frac{24 \times 3}{2}\right]$$
$$= \frac{25}{2}[4 + 36] = \frac{25 \times 40}{2} = 500$$

Problem 2

निम्नलिखित श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए—

Find the sum of the following series :

(i) 4, 7, 10,......, 148

(ii) 72 + 70 + 68 + ... + 40

(iii) $2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + ... + (3n-1) + (3n)$

Solution

(i) यहाँ पदों की संख्या n ज्ञात नहीं है परन्तु

प्रथम पद, $a = 4$, सार्व अन्तर, $d = 3$ तथा अन्तिम पद, $l = 148$ ज्ञात है

अतः n पदों के योग का सूत्र :

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ प्रयोग किया जा सकता है

nवाँ पद, $T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 148 = 4 + (n-1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$

$\Rightarrow \quad 3n = 148 - 1 = 147$

$\therefore \quad n = \frac{147}{3} = 49$

अर्थात् श्रेढी में 49 पद हैं तथा इन्हीं 49 पदों का योग ज्ञात करना है।

अतः $S_{49} = \frac{49}{2}[4 + 148] = \frac{49 \times 152}{2} = 49 \times 76 = 3724$

(ii) यहाँ प्रथम पद, $a = 72$, सार्व अन्तर, $d = 70 - 72 = -2$

अन्तिम पद, $l = T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 40 = 72 + (n-1)(-2)$

$\Rightarrow \quad 40 = 72 - 2n + 2 = 74 - 2n$

$\Rightarrow \quad 2n = 74 - 40 = 34$

$\therefore \quad n = \frac{34}{2} = 17$ अर्थात् श्रेढी में 17 पद हैं

अतः n पदों का योग,

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$\Rightarrow \quad S_{17} = \frac{17}{2}[72 + 40] = \frac{17 \times 112}{2} = 17 \times 56 = 952$$

(iii) ध्यान से देखने से पता चलता है कि यहाँ दो समान्तर श्रेढियाँ हैं—

प्रथम $2 + 5 + 8 + ... + (3n-1)$, यहाँ $a = 2, d = 3$, पदों की संख्या $= n$

द्वितीय $3 + 6 + 9 + ... + 3n$, यहाँ $a = 3, d = 3$, पदों की संख्या $= n$

n पदों का योगफल,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

प्रथम श्रेढी के लिए

$$\Rightarrow \quad S_n' = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1) \times 3]$$

$$= \frac{n}{2}(4 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 1)$$

द्वितीय श्रेढी के लिए

$$\Rightarrow \quad S_n'' = \frac{n}{2}[2 \times 3 + (n-1) \times 3]$$

$$= \frac{n}{2}(6 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 3)$$

अतः दी हुई श्रेढी का योगफल,

$$S_n = S_n' + S_n''$$

$$= \frac{n}{2}(3n + 1) + \frac{n}{2}(3n + 3)$$

$$= \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2}$$

$$= \frac{6n^2}{2} + \frac{4n}{2} = 3n^2 + 2n = n(3n + 2)$$

Problem 3

निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

Find the sum of the following series upto n terms :

(i) $1 - 3 - 7 - 11$ .....

(ii) $8 + 3 - 2 - 7$ ......

Solution

(i) यहाँ $a = 1, d = -3 - 1 = -4$

$$\text{अतः} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)(-4)]$$

$$= \frac{n}{2}(2 - 4n + 4)$$

$$= \frac{n}{2}(6 - 4n)$$

$$= 3n - 2n^2 = n(3n - 2n)$$

(ii) यहाँ $\quad a = 8, d = 3 - 8 = -5$

$$\text{अतः} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2}[2 \times 8 + (n-1)(-5)]$$

$$= \frac{n}{2}(16 - 5n + 5)$$

$$= \frac{n}{2}(21 - 5n)$$

Problem 4

100 और 300 के मध्य की सभी विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

Find the sum of all the odd integers between 100 and 300.

Solution

इससे स्पष्ट है कि प्रथम पद $a = 101$, $d = 103 - 101 = 2$ तथा अन्तिम पद $= 299$

मान लिया कुल विषम संख्याएँ (पद) n हैं,

$$\text{अतः} \quad T_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 299 = 101 + (n-1) \times 2 = 101 + 2n - 2 = 99 + 2n$$

$$\Rightarrow \quad 2n = 299 - 99 = 200$$

$$\therefore \quad n = \frac{200}{2} = 100$$

अर्थात् कुल पद 100 हैं। अतः 100 पदों का योगफल,

$$S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 101 + (100 - 1) \times 2]$$

$$= 50(202 + 99 \times 2)$$

$$= 50(202 + 198) = 50 \times 400 = 20{,}000$$

Problem 5

101 तथा 999 के बीच की सभी सम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

Find the sum of all the even integers between 101 and 999.

Solution

101 तथा 999 के बीच की सभी सम संख्याएँ हैं—

102, 104, 106, ..., 998,

जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 102, d = 2, l = T_n = 998$

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 998 = 102 + (n-1) \times 2$$

$$\Rightarrow \quad 998 = 102 + 2n - 2 = 100 + 2n$$

$$\Rightarrow \quad 2n = 998 - 100 = 898$$

$$\therefore \quad n = \frac{898}{2} = 449$$

अर्थात् कुल पद 449 हैं। अतः इन 449 सम संख्याओं का योगफल

$$S_{449} = \frac{449}{2}[2 \times 102 + (449 - 1) \times 2]$$

$$\Rightarrow \quad S_{449} = \frac{449}{2}(204 + 896) = \frac{449 \times 1100}{2}$$

$$= 449 \times 550 = 2{,}46{,}950$$

Problem 6

10 और 200 के बीच सभी प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाजित हो जाती हैं।

Find the sum of all the natural numbers between 10 and 200 which are divisible by 7.

Solution

10 और 200 के बीच सभी प्राकृतिक संख्याएँ जो 7 से विभाजित हो जाती हैं, इस प्रकार हैं—

14, 21, 28, ..., 196

जो एक समान्तर श्रेढी में हैं। जहाँ $a = 14, d = 7, T_n = l = 196$

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 196 = 14 + (n-1) \times 7 = 14 + 7n - 7 = 7 + 7n$$

$$\Rightarrow \quad 7n = 196 - 7 = 189$$

$$\therefore \quad n = \frac{189}{7} = 27$$

अर्थात् उपर्युक्त श्रेढी में 27 पद हैं। इन 27 पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$\Rightarrow \quad S_{27} = \frac{27}{2}(14 + 196) = \frac{27 \times 210}{2}$$

$$= 27 \times 105 = 2,835$$

Problem 7

200 और 550 के बीच 9 से विभाजित होने वाली संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

Find the sum of all numbers between 200 and 550 which are divisible by 9.

Solution

200 और 550 के बीच 9 से विभाजित होने वाली संख्याएँ इस प्रकार हैं*—

207, 216, 225, ... 549

* 200 को 9 से भाग दो 9)200(22 18 20 18 2 यदि शेष में 7 जोड़ दिया तो जाय 9 से पूरा-पूरा भाग हो जायेगा अतः 9 से भाग होने वाली संख्या 200 + 7 = 207 हुई।	550 को 9 से भाग दो 9)550(61 54 10 9 1 61 × 9 = 549, इस प्रकार अन्तिम संख्या 549 हुई।

जो एक समान्तर श्रेढी है जिसका प्रथम पद $a = 207$, $d = 9$ तथा अन्तिम पद, $T_n = l = 549$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow \quad 549 = 207 + (n - 1) \times 9 = 207 + 9n - 9 = 198 + 9n$$

$$\Rightarrow \quad 9n = 549 - 198$$

$$\Rightarrow \quad 9n = 351$$

$$\therefore \quad n = \frac{351}{9} = 39$$

अतः 39 पदों का योग

$$S_{39} = \frac{39}{2}[207 + 549] = \frac{39 \times 756}{2}$$

$$= 39 \times 378 = 14,742$$

Problem 8

एक सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए कि 10 और 100 के बीच में कितने पूर्णांक 3 से विभाजित होंगे ?

How many integers between 10 and 100 are divisible by 3 ? Solve by a formula.

Solution

10 और 100 के बीच में 3 से विभाजित होने वाली संख्याएँ निम्न प्रकार हैं—

12, 15, 18, ..., 99

जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 12, d = 3, T_n = l = 99$

सूत्र : $\quad T_n = a + (n - 1)d$

$$\Rightarrow \quad 99 = 12 + (n - 1) \times 3 = 12 + 3n - 3 = 9 + 3n$$

$$\Rightarrow \quad 3n = 99 - 9 = 90$$

$$\therefore \quad n = \frac{90}{3} = 30$$

Problem 9

100 और 400 के बीच 7 से विभाजित होने वाले पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

Find the sum of all integers between 100 and 400 which are divisible by 7.

Solution

100 और 400 के बीच 7 से विभाजित होने वाली पूर्णांक संख्याएँ इस प्रकार हैं—

105, 105 + 7, 105 + 2 × 7, ..., 399

अर्थात् 105, 112, 119, ..., 339

जहाँ $a = 105,\ d = 7,\ T_n = l = 399, T_n = a + (n - 1)d$

$$\Rightarrow \quad 399 = 105 + (n - 1) \times 7 = 105 + 7n - 7 = 98 + 7n$$

$$\Rightarrow \quad 7n = 399 - 98 = 301$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{301}{7} = 43$$

43 पदों का योग,

$$S_{43} = \frac{43}{2}[105 + 399] = \frac{43 \times 504}{2}$$

$$= 43 \times 252 = 10,836$$

Problem 10

100 और 800 के बीच 6 से विभाजित होने वाले सम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

Find the sum of all even integers between 100 and 800 which are divisible by 6.

Solution

100 और 800 के बीच 6 से विभाजित होने वाले सम पूर्णांक निम्नलिखित हैं—

102, 102 + 6, ..., 798

जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 102, d = 6, T_n = l = 798$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow \quad 798 = 102 + (n - 1) \times 6 = 102 + 6n - 6 = 96 + 6n$$

$$\Rightarrow \quad 6n = 798 - 96 = 702$$

$$\therefore \quad n = \frac{702}{6} = 117$$

इस प्रकार 117 पदों का योग,

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$\Rightarrow \quad S_{117} = \frac{117}{2}(102 + 798) = \frac{117 \times 900}{2}$$

$$= 117 \times 450 = 52,650$$

Problem 11

500 और 1,000 के बीच प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जो 13 से विभाजित हो जाती हैं।

Find the sum of all natural numbers between 500 and 1,000 which are divisible by 13.

Solution

500 और 1,000 के बीच 13 से विभाजित होने वाली संख्याएँ निम्न प्रकार हैं—

507, 520, 533, ..., 988

जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 507, d = 13, T_n = l = 988$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$\Rightarrow$ $$988 = 507 + (n - 1) \times 13$$
$$= 507 + 13n - 13 = 494 + 13n$$
$\Rightarrow$ $$13n = 988 - 494 = 494$$
$\therefore$ $$n = \frac{494}{13} = 38$$

इस प्रकार समान्तर श्रेढी के 38 पदों का योग,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$\Rightarrow$ $$S_{38} = \frac{38}{2}[507 + 988] = 19 \times 1495 = 28,405$$

Problem 12

100 और 300 के बीच [(a) दोनों में सम्मिलित करते हुए, तथा (b) दोनों को सम्मिलित न करते हुए] उन प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए—

Find the sum of all natural numbers between 100 and 300 [(a) including both of these, and (b) excluding both of these] :

(i) जो 4 से विभाजित हो जाती हैं।
Which are exactly divisible by 4.

(ii) जो 5 से विभाजित हो जाती हैं।
Which are exactly divisible by 5.

(iii) जो 4 और 5 से विभाजित होती हैं।
Which are exactly divisible by 4 and 5.

(iv) जो 4 या 5 से विभाजित होती हैं।
Which are exactly divisible by 4 or 5.

Solution

(i) 100 और 300 के बीच 4 से विभाजित होने वाली संख्याएँ निम्न प्रकार हैं—
104, 108, ..., 296
जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 104, d = 4, T_n = l = 296$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$\Rightarrow$ $$296 = 104 + (n - 1) \times 4 = 104 + 4n - 4 = 100 + 4n$$
$\Rightarrow$ $$4n = 296 - 100 = 196$$
$\therefore$ $$n = \frac{196}{4} = 49$$

इस प्रकार समान्तर श्रेढी के 49 पदों का योग,

$$S_{49} = \frac{49}{2}[104 + 296] = \frac{49 \times 400}{2}$$
$$= 49 \times 200 = 9,800$$

टिप्पणी—यदि 100 और 300 को भी सम्मिलित किया जाय तो योगफल 9,800 + 100 + 300 = 10,200 होगा।

(ii) 100 और 300 के बीच 5 से विभाजित संख्याएँ निम्नलिखित हैं—
105, 110, ..., 295
जो एक समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 105, d = 5, T_n = l = 295$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$\Rightarrow$ $$295 = 105 + (n - 1) \times 5 = 105 + 5n - 5 = 100 + 5n$$
$\Rightarrow$ $$5n = 295 - 100 = 195$$
$\therefore$ $$n = \frac{195}{5} = 39$$

समान्तर श्रेढी के 39 पदों का योगफल,

$$S_{39} = \frac{39}{2}(105 + 295) = \frac{39 \times 400}{2}$$
$$= 39 \times 200 = 7,800$$

टिप्पणी—यदि 100 और 300 को भी सम्मिलित किया जाय तो योगफल 7,800 + 100 + 300 = 8,200 होगा।

(iii) 4 और 5 से विभाजित होने वाली संख्याएँ वे हैं जो 4 × 5 अर्थात् 20 से विभाजित हो जाती हैं। अतः वांछित संख्याएँ 120, 140, 160, ..., 280 हैं
जो समान्तर श्रेढी में हैं जहाँ $a = 120, d = 20, T_n = l = 280$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$\Rightarrow$ $$280 = 120 + (n - 1) \times 20$$
$$= 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$$
$\Rightarrow$ $$20n = 280 - 100 = 180$$
$\therefore$ $$n = \frac{180}{20} = 9$$

इस समान्तर श्रेणी के 9 पदों का योग,

$$S_9 = \frac{9}{2}(120 + 280)$$
$$= \frac{9 \times 400}{2} = 9 \times 200 = 1,800$$

टिप्पणी—यदि 100 और 300 को भी सम्मिलित किया जाय तो योगफल 1,800 + 100 + 300 = 2,200 होगा।

(iv) 4 या 5 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या
= 4 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या
+ 5 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या
− 4 तथा 5 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या
= 49 + 39 − 9 = 79 (उपर्युक्त (i), (ii) तथा (iii) से)

अतः 100 और 300 के बीच 4 या 5 से विभाजित होने वाली संख्याओं का योगफल,

$$S = S_{49} + S_{39} - S_9$$
$$= 9,800 + 7,800 - 1,800 = 15,800$$

टिप्पणी—यदि 100 और 300 को भी सम्मिलित कर लिया जाय तो योगफल 15,800 + 100 + 300 = 16,200 होगा।

Problem 13

चार अंकों वाली उन सभी विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जो 9 से विभाजित होती हैं।

Find the sum of all odd numbers of 4 digits which are divisible by 9.

Solution

4 अंकों की विषम संख्याएँ जो 9 से विभाजित हो जाती हैं, निम्नलिखित हैं—
1017, 1035, 1053,...., 9999
जो एक स. श्रेढी में हैं जहाँ $a = 1017, d = 18$ तथा $T_n = l = 9999$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$\Rightarrow$ $$9999 = 1017 + (n - 1) \times 18$$
$\Rightarrow$ $$9999 = 1017 + 18n - 18$$
$\Rightarrow$ $$9999 = 999 + 18n$$

$\Rightarrow \quad 18n = 9999 - 999 = 9000$

$\therefore \quad n = \frac{9000}{18} = 500$

इस समान्तर श्रेढी के 500 पदों का योग,

$$S_{500} = \frac{500}{2}(1017 + 9999) = 250 \times 11016$$
$$= 27,54,000$$

प्रश्नावली 1(C)

Problem 1

श्रेणी 42, 36, 30,.....में कितने पदों का योग 150 होगा ?

How many terms of the series 42, 36, 30......amount to 150 ?

Solution

यहाँ प्रथम पद, $a = 42$ तथा सार्व अन्तर, $d = 36 - 42 = -6$ है।

मान लो n पदों का योग 150 है

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad 150 = \frac{n}{2}[2 \times 42 + (n-1)(-6)]$

$\Rightarrow \quad 150 = \frac{n}{2}(84 - 6n + 6)$

$\Rightarrow \quad 150 = \frac{n}{2}(90 - 6n)$

$\Rightarrow \quad 150 \times 2 = n(90 - 6n)$

$\Rightarrow \quad 300 = 90n - 6n^2$

$\Rightarrow \quad 6n^2 - 90n + 300 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 15n + 50 = 0$ (6 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 - 10n - 5n + 50 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-10) - 5(n-10) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-10)(n-5) = 0$

$\therefore \quad n = 5$ या $n = 10$

Problem 2

श्रेणी 2 + 4 + 6 + ...के कितने पदों का योग 42 होगा ?

How many terms of the series 2 + 4 + 6 +.....amount to 42 ?

Solution

यहाँ प्रथम पद, $a = 2$ तथा सार्व अन्तर, $d = 4 - 2 = 2$

मान लो n पदों का योग 42 है

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-a)d]$

$\Rightarrow \quad 42 = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1) \times 2]$

$\Rightarrow \quad 42 = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2)$

$\Rightarrow \quad 42 = \frac{n}{2}(2 + 2n)$

$\Rightarrow \quad 42 \times 2 = 2n + 2n^2$

$\Rightarrow \quad 42 = n + n^2$ (2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 + n - 42 = 0$

$\Rightarrow \quad n - 6n + 7n - 42 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-6) + 7(n-6) = 0$

$\Rightarrow \quad (n+7)(n-6) = 0$

$\therefore \quad n = 6$ क्योंकि $n = -7$ असम्भव है।

Problem 3

श्रेणी 17, 15, 13,....के कितने पदों का योग 72 होगा ?

How many terms of the series 17, 15, 13,.....amount to 72 ?

Solution

यहाँ $a = 17, d = 15 - 17 = -2$

माना कि n पदों का योग 72 है।

सूत्र : $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad 72 = \frac{n}{2}[2 \times 17 + (n-1)(-2)]$

$\Rightarrow \quad 72 = \frac{n}{2}[34 - 2n + 2]$

$\Rightarrow \quad 72 = \frac{n}{2}(36 - 2n)$

$\Rightarrow \quad 72 \times 2 = 36n - 2n^2$

$\Rightarrow \quad 2n^2 - 6n + 144 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 18n + 72 = 0$ (2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 - 12n - 6n + 72 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-12) - 6(n-12) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-6)(n-12) = 0$

$n = 6$ या $n = 12$

Problem 4

श्रेणी 5, 7, 9,.....के कितने पदों का योग 1,020 होगा ?

What is the number of terms in the series 5, 7, 9,....., if its sum is 1,020 ?

Solution

यहाँ प्रथम पद $a = 5$ तथा सार्व अन्तर $d = 2$ है।

माना कि n पदों का योग 1,020 है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow \quad 1020 = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1) \times 2]$

$\Rightarrow \quad 1020 = \frac{n}{2}[10 + 2n - 2]$

$\Rightarrow \quad 1020 = \frac{n}{2}(8 + 2n)$

$\Rightarrow \quad 1020 \times 2 = 8n + 2n^2$

$\Rightarrow \quad 2n^2 + 8n - 1020 \times 2 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 + 4n - 1020 = 0$ (2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 + 34n - 30n - 1020 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n+34) - 30(n+34) = 0$

$\Rightarrow \quad (n+34)(n-30) = 0$

$\therefore \quad n = 30$ क्योंकि $n = -34$ असम्भव है।

योगफल 1,020 स. श्रे. के 30 पदों का होगा।

Problem 5

श्रेणी 30, 27, 24,.....के कितने पदों का योग 156 होगा ?

How many terms of the series 30, 27, 24,......must be taken so that the sum may be 156 ?

Solution

यहाँ प्रथम पद, $a = 30$, सार्व अन्तर, $d = 27 - 30 = -3$ मान लो n पदों का योगफल 156 है।

अतः $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad 156 = \frac{n}{2}[2 \times 30 + (n-1)(-3)]$

$\Rightarrow \quad 156 = \frac{n}{2}[60 - 3n + 3]$

$\Rightarrow \quad 156 \times 2 = n(63 - 3n)$

$\Rightarrow \quad 156 \times 2 = 63n - 3n^2$

$\Rightarrow \quad 3n^2 - 63n + 312 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 21n + 104 = 0$ (3 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 - 13n - 8n + 104 = 0$

$n(n-13) - 8(n-13) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-13)(n-8) = 0$

$\therefore \quad n = 13$ या $n = 8$

अर्थात् 8 या 13 पदों का योग 156 होगा क्योंकि 13 पद लेने पर अन्तिम 5 पदों का योग शून्य है।

Problem 6

एक स. श्रे. के n पदों का योग 48, प्रथम पद 20 और सार्व अन्तर -4 है। पदों की संख्या बताओ।

The sum upto n terms of an A.P. is 48, first term is 20 and common difference is 4. Find the number of terms.

Solution

दिया है : $a = 20, d = -4, S_n = 48$

सूत्र : $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad 48 = \frac{n}{2}[2 \times 20 + (n-1)(-4)]$

$\Rightarrow \quad 48 \times 2 = n(40 - 4n + 4) = n(44 - 4n)$

$\Rightarrow \quad 96 = 44n - 4n^2$

$\Rightarrow \quad 4n^2 - 44n + 96 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 11n + 24 = 0$ (4 से भाग देने पर)

$\Rightarrow n^2 - 8n - 3n + (-8) \times (-3) = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-8) - 3(n-8) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-8)(n-3) = 0$

$\therefore \quad n = 3$ या $n = 8$

Problem 7

एक स. श्रे. का योग $40\frac{1}{2}$ है, सार्व अन्तर $2\frac{1}{2}$ तथा अन्तिम पद 13 है। प्रथम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

The sum of the series in A.P. is $40\frac{1}{2}$, the common difference is $2\frac{1}{2}$ and the last term is 13. Find the first term and the number of terms in the series.

Solution

यहाँ $S_n = 40\frac{1}{2} = \frac{81}{2}, \; d = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \; T_n = l = 13$

$T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 13 = a + (n-1)\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad 13 \times 2 = a \times 2 + 5n - 5$

$\Rightarrow \quad 26 = 2a + 5n - 5$

$\Rightarrow \quad 2a + 5n = 26 + 5$

$\Rightarrow \quad 2a = 31 - 5n$

$\Rightarrow \quad a = \frac{31 - 5n}{2}$ ....(1)

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$\Rightarrow \quad \frac{81}{2} = \frac{n}{2}(a + 13)$

$\Rightarrow \quad 81 = na + 13n$

$\Rightarrow \quad 81 = n\left(\frac{31 - 5n}{2}\right) + 13n$

समीकरण (1) से a का मान रखने पर,

$81 \times 2 = 31n - 5n^2 + 26n$

$162 = 57n - 5n^2$

$\Rightarrow \quad 5n^2 - 57n + 162 = 0$

$\Rightarrow \quad 5n^2 - 30n - 27n + 162 = 0$

$\Rightarrow \quad (n-6)(5n-27) = 0$

$\therefore \quad n = 6$ क्योंकि $n = \frac{27}{5}$ असम्भव है

n के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$a = \frac{31 - 5 \times 6}{2} = \frac{31 - 30}{2} = \frac{1}{2}$

अतः $\quad a = \frac{1}{2}, n = 6.$

Problem 8

यदि स. श्रे. में $n = 12, l = 71, d = 3$ तो a तथा S के मान ज्ञात कीजिए।

Given $n = 12, l = 71, d = 3$ in an A.P., find a and S.

Solution

ज्ञात है : $n = 12, T_n = l = 71, d = 3$

$T_n = a + (n-1)d$

$$\Rightarrow \quad 71 = a + (12 - 1) \times 3$$
$$\Rightarrow \quad 71 = a + 33$$
$$\Rightarrow \quad a = 71 - 33 = 38$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$S_{12} = \frac{12}{2}(38 + 71) = 6 \times 109 = 654$$

Problem 9

किसी स. श्रे. का अन्तिम पद 40, योग 952 तथा सार्व अन्तर −2 है। प्रथम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

The last term of a series in A.P. is 40, the sum is 952 and the common difference is −2. Find the first term and the number of terms in the series.

Solution

ज्ञात है : $T_n = l = 40,\ S_n = 952, d = -2$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$$\Rightarrow \quad 40 = a + (n - 1)(-2)$$
$$\Rightarrow \quad 40 = a - 2n + 2$$
$$\Rightarrow \quad a - 2n = 40 - 2 = 38$$
$$\Rightarrow \quad a = 38 + 2n \quad \text{....(1)}$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$\Rightarrow \quad 952 = \frac{n}{2}(a + 40)$$
$$\Rightarrow \quad 952 \times 2 = na + 40n$$
$$\Rightarrow \quad na + 40n - 1904 = 0$$
$$\Rightarrow \quad n(38 + 2n) + 40n - 1904 = 0$$

समीकरण (1) से a का मान रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 38n + 2n^2 + 40n - 1904 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2n^2 + 78n - 1904 = 0$$
$$\Rightarrow \quad n^2 + 39n - 952 = 0 \quad \text{(2 से भाग देने पर)}$$
$$\Rightarrow \quad n^2 - 17n + 56n - 952 = 0$$
$$\Rightarrow \quad n(n - 17) + 56(n - 17) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (n - 17)(n + 56) = 0$$
$$\therefore \quad n = 17 \text{ क्योंकि } n = -56 \text{ असम्भव है।}$$

n के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$a = 38 + 2 \times 17 = 38 + 34 = 72$$

Problem 10

श्रेणी 25, 22, 19, 16,.....के n पदों तक योग 116 है। पदों की संख्या तथा अन्तिम पद ज्ञात कीजिए।

The sum of n terms of the series 25, 22, 19, 16,......is 116. Find the number of terms and the last term.

Solution

यहाँ $a = 25, d = 22 - 25 = -3, S_n = 116$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$
$$\Rightarrow \quad 116 = \frac{n}{2}[2 \times 25 + (n - 1)(-3)]$$
$$\Rightarrow \quad 116 \times 2 = n[50 - 3n + 3]$$
$$\Rightarrow \quad 232 = n(53 - 3n) = 53n - 3n^2$$
$$\Rightarrow \quad 3n^2 - 53n + 232 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 3n^2 - 24n - 29n + 232 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 3n(n - 8) - 29n(n - 8) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (n - 8)(3n - 29) = 0$$
$$\therefore \quad n = 8 \text{ क्योंकि } n = \frac{29}{3} \text{ असम्भव है।}$$
$$T_n = a + (n - 1)d$$
$$\Rightarrow \quad T_8 = 25 + (8 - 1)(-3)$$
$$= 25 + 7 \times (-3) = 25 - 21 = 4$$

Problem 11

एक स. श्रे. में n पदों का योग, सार्व अन्तर तथा अन्तिम पद क्रमशः 136, 4 तथा 31 हैं। n का मान ज्ञात कीजिए।

In an A.P., the sum of n terms, common difference and last term are 136, 4 and 31 respectively. Find the value of n.

Solution

ज्ञात है : $S_n = 136, d = 4, T_n = l = 31$

$$T_n = a + (n - 1)d$$
$$\Rightarrow \quad 31 = a + (n - 1)4 = a + 4n - 4$$
$$\Rightarrow \quad a + 4n = 31 + 4 = 35$$
$$\Rightarrow \quad a = 35 - 4n \quad \text{...(1)}$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$
$$\Rightarrow \quad 136 = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) \times 4]$$
$$\Rightarrow \quad 136 \times 2 = n(2a + 4n - 4) = 2an + 4n^2 - 4n$$
$$\Rightarrow \quad 2an + 4n^2 - 4n - 272 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2(35 - 4n)n + 4n^2 - 4n - 272 = 0 \quad \text{(}a\text{ का मान रखने पर)}$$
$$\Rightarrow \quad 70n - 8n^2 + 4n^2 - 4n - 272 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -4n^2 + 66n - 272 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4n^2 - 66n + 272 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2n^2 - 33n + 136 = 0 \quad \text{(2 से भाग देने पर)}$$
$$\Rightarrow \quad 2n^2 - 16n - 17n + 136 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2n(n - 8) - 17(n - 8) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (n - 8)(2n - 17) = 0$$
$$\therefore \quad n = 8 \text{ क्योंकि } n = \frac{17}{2} \text{ असम्भव है।}$$

Problem 12

किसी श्रेणी 5 + 7 + 9 + ...के कितने पद जोड़े जायें कि उनका योग 480 हो जाय ?

How many terms of the series 5 + 7 + 9 +......must be taken in order that the sum may be 480 ?

Solution

यहाँ स.श्रे. में $a = 5, d = 7 - 5 = 2$ है।

मान लिया n पदों का योग 480 है।

अत: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad 480 = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1) \times 2]$

$\Rightarrow \quad 480 \times 2 = n(10 + 2n - 2)$

$\Rightarrow \quad 960 = n(8 + 2n) = 8n + 2n^2$

$\Rightarrow \quad 2n^2 + 8n - 960 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 + 4n - 480 = 0$ (2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad n^2 - 20n + 24n - 480 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n - 20) + 24(n - 20) = 0$

$\Rightarrow \quad (n - 20)(n + 24) = 0$

$\therefore \quad n = 20$, क्योंकि $n + -24$ असम्भव है।

प्रश्नावली 1(D)

Problem 1

निम्नलिखित श्रेणी का nवाँ पद तथा n पदों का योग ज्ञात कीजिए—

Find the nth term and sum upto n terms of the following series :

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + ...$

Solution

यहाँ $T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3$

– – –

अत: $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum (n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{2}[\Sigma n^2 + \Sigma n]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1+3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2(n+2)}{3}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Problem 2

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ का योग निकालें।

Find out the sum of $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

Solution

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

हम जानते हैं कि

$$x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$$

उपर्युक्त में x के लिए क्रम से 1, 2, 3,....., $(n - 1)$, n रखने पर,

$$1^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$3^2 - 2^3 = 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$$

– – –

– – –

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3 \times (n-1)^2 - 3 \times (n-1) + 1$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3 \times n^2 - 3 \times n + 1$$

उपर्युक्त सभी को जोड़ने पर,

$$n^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + ... + 3 \times n^2 - 3 \times 1 - 3 \times 2 - ...... - 3 \times n + n$$

$\Rightarrow \quad n^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + ... + n) + n$

$\Rightarrow \quad n^3 = 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n$

$\Rightarrow \quad 3S = n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n$

$$= n^3 - n + \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$= n(n^2 - 1) + \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$= n(n-1)(n+1) + \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$= n(n+1)\left[(n-1) + \frac{3}{2}\right]$$

$$= n(n+1)\left[\frac{2n-2+3}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$\therefore \quad S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \times 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Problem 3

निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

Find the sum of the following series upto n terms :

(i) $1 + 5 + 11 + 19 + ...$

(ii) $2 + 6 + 12 + 20 + ...$

(iii) $1 + 9 + 24 + 46 + ...$

(iv) $2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + ...$

(v) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + ...$

Solution

(i) माना कि ज्ञात श्रेणी के n पदों का योग S_n है अर्थात्

$$S_n = 1 + 5 + 11 + 19 + ... + T_{n-1} + T_n$$

पुनः $\quad S_n = ... 1 + 5 + 11 + ... T_{n-2} + T_{n-1} + T_n$

(एक पद दायीं ओर हटाकर लिखने पर)

घटाने पर, $\quad 0 = 1 + [4 + 6 + 8 + ... (n-1)$ पदों तक$] - T_n$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(n-1)}{2}[2 \times 4 + (n-1-1) \times 2] - T_n$$

(कोष्ठक में लिखी स. श्रे. का योगफल लिखने पर)

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(n-1)}{2}[8 + 2n - 4] - T_n$$

$$\Rightarrow \quad T_n = 1 + \frac{(n-1)(4+2n)}{2}$$

$$= 1 + (n-1)(2+n)$$

$$= 1 + \{2n + n^2 - 2 - n\}$$

$$= 1 + [n + n^2 - 2]$$

$$= 1 + n + n^2 - 2$$

अर्थात् $\quad T_n = n^2 + n - 1$

अतः $\quad S_n = \Sigma T_n = \Sigma n^2 + \Sigma n - \Sigma 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= n\left[\frac{2n^2 + n + 2n + 1 + 3n + 3 - 6}{6}\right]$$

$$= n\left[\frac{2n^2 + 6n - 2}{6}\right]$$

$$= \frac{n \times 2(n^2 + 3n - 1)}{6} = \frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

(ii) यहाँ $\quad S_n = 2 + 6 + 12 + 20 + ... + T_{n-1} + T_n$

पुनः $\quad S_n = 2 + 6 + 12 + ... + T_{n-2} + T_{n-1} + T_n$

घटाने पर, $\quad 0 = 2 + [4 + 6 + 8 + ... (n-1)$ पदों तक$] - T_n$

$$\Rightarrow \quad T_n = 2 + \frac{(n-1)}{2}[2 \times 4 + (n-2)2]$$

$$= 2 + \frac{(n-1)}{2}[8 + 2n - 4]$$

$$= 2 + \frac{(n-1)}{2}(4 + 2n)$$

$$= 2 + (n-1)(2+n)$$

$$= 2 + 2n + n^2 - 2 - n$$

$$= n^2 + n$$

अतएव श्रेणी का योग,

$$S_n = \Sigma T_n = \Sigma n^2 + \Sigma n$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}[2n + 1 + 3]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)2(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(iii) यहाँ $\quad S_n = 1 + 9 + 24 + 46 + ... + T_{n-1} + T_n$

पुनः $\quad S_n = 1 + 9 + 24 + ... + T_{n-2} + T_{n-1} + T_n$

घटाने पर, $\quad 0 = 1 + \{8 + 15 + 22 + ... (n-1)$ पदों तक$\} - T_n$

$$\Rightarrow \quad T_n = 1 + \frac{(n-1)}{2}[2 \times 8 + (n-1-1) \times 7]$$

$$= 1 + \frac{(n-1)}{2}[16 + 7n - 14]$$

$$= 1 + \frac{(n-1)}{2}(2 + 7n)$$

$$= \frac{2 + (n-1)(2+7n)}{2}$$

$$= \frac{2 + 2n + 7n^2 - 2 - 7n}{2} = \frac{7n^2 - 5n}{2}$$

अतः श्रेणी का योग,

$$S_n = \Sigma T_n = \Sigma\left(\frac{7n^2 - 5n}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{2}\Sigma n^2 - \frac{5}{2}\Sigma n$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{7(2n+1)}{6} - \frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{14n + 7 - 15}{6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{14n - 8}{6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2(7n-4)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(7n-4)}{6}$$

(iv) यहाँ $\quad T_1 = 2^2 = (3 \times 1 - 1)^2$

$$T_2 = 5^2 = (3 \times 2 - 1)^2$$

$$T_3 = 8^2 = (3 \times 3 - 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad T_n = (3n-1)^2$$

$$= 9n^2 - 6n + 1$$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n$$
$$= \Sigma(9n^2 - 6n + 1)$$
$$= 9\Sigma n^2 - 6\Sigma n + \Sigma 1$$
$$= 9.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{n[18n^2 + 27n + 9 - 18n - 18 + 6]}{6}$$
$$= \frac{n}{6}(18n^2 + 9n - 3)$$
$$= \frac{n}{6}[18n^2 + 9n - 3]$$
$$= \frac{3n}{6}[6n^2 + 3n - 1]$$
$$= \frac{n}{2}[6n^2 + 3n - 1]$$

(v) यहाँ
$$T_1 = 1^3 = (2 \times 1 - 1)^3$$
$$T_2 = 3^3 = (2 \times 2 - 1)^3$$
$$T_3 = 5^3 = (2 \times 3 - 1)^3$$
$$\Rightarrow \quad T_n = (2 \times n - 1)^3$$
$$= 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n$$
$$= 8\Sigma n^3 - 12\Sigma n^2 + 6\Sigma n - \Sigma 1$$
$$= 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n$$
$= n^2(2n^2 - 1)$, सरल करने पर

Problem 4

निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

Find the sum of the following series upto n terms :

(i) 1.2.3 + 2.3.5 + 3.4.7 + ...

(ii) 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ...

(iii) 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...

Solution

(i) यहाँ
$$T_1 = 1.2.3$$
$$T_2 = 2.3.5$$
$$T_3 = 3.4.7$$
$$\Rightarrow \quad T_n = n(n+1)(2n+1)$$
$$= n(2n^2 + n + 2n + 1)$$
$$= n(2n^2 + 3n + 1)$$
$$= 2n^3 + 3n^2 + n$$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n = 2\Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + \Sigma n$$
$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}[n(n+1) + 2n + 1 + 1]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}[n^2 + n + 2n + 1 + 1]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}[n^2 + 3n + 2]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}(n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n}{2}(n+1)^2(n+2)$$

(ii) यहाँ nवाँ पद,
$$T_n = (2n-1)(2n+1)(2n+3)$$
$$= (4n^2 - 1)(2n + 3) = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n$$
$$= 8\Sigma n^3 + 12\Sigma n^2 - 2\Sigma n - 3\Sigma 1$$
$$= 8\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} - 3n$$
$$= 2\{n(n+1)\}^2 + 2n(n+1)(2n+1) - n(n+1) - 3n$$
$$= n[2n(n+1)^2 + 2(n+1)(2n+1) - (n+1) - 3]$$
$$= n[2n(n^2 + 2n + 1) + 2(2n^2 + 3n + 1) - n - 1 - 3]$$
$$= n[2n^3 + 4n^2 + 2n + 4n^2 + 6n + 2 - n - 1 - 3]$$
$$= n[2n^3 + 8n^2 + 7n - 2] = n(n+2)(2n^2 + 4n - 1)$$

(iii) यहाँ nवाँ पद,
$$T_n = n(n+1)(n+2)$$
$$= n(n^2 + 3n + 2)$$
$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n$$
$$= \Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + 2\Sigma n$$

---

* $2n^3 + 8n^2 + 7n - 2$ में $n = -2$ रखने पर शून्य हो जाता है अतः $(n + 2)$ इसका एक गुणनखण्ड है। अतः $2n^3 + 8n^2 + 7n - 2$ को $(n + 2)$ से भाग देने पर,

$$n + 2)\, 2n^3 + 8n^2 + 7n - 2\,(2n^2 + 4n - 1$$
$$2n^3 + 4n^2$$
$$- \quad -$$
$$4n^2 + 7n - 2$$
$$4n^2 + 8n$$
$$- \quad -$$
$$-n - 2$$
$$-n - 2$$
$$+ \quad +$$
$$\times$$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{4}[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]$$
$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + n + 4n + 2 + 4)$$
$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + 5n + 6)$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Problem 5

यदि किसी श्रेणी का nवाँ पद $12n^2 - 6n + 5$ है तो योगफल ज्ञात कीजिए।

Find the sum of the series whose nth term is $12n^2 - 6n + 5$.

Solution

यहाँ $T_n = 12n^2 - 6n + 5$

अतः
$$S_n = \Sigma T_n$$
$$= 12\Sigma n^2 - 6\Sigma n + 5\Sigma n$$
$$= 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2} + 5n$$
$$= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 5n$$
$$= n(n+1)[2(2n+1) - 3] + 5n$$
$$= n(n+1)(4n+2-3) + 5n$$
$$= n(n+1)(4n-1) + 5n$$
$$= n[(n+1)(4n-1) + 5]$$
$$= n[4n^2 - n + 4n - 1 + 5]$$
$$= n(4n^2 + 3n + 4)$$

Problem 6

उस श्रेणी को ज्ञात करो जिसका rवाँ पद—

Find the series whose rth term is :

(i) $2r - 1$ (ii) $2r + 1$ (iii) $\frac{1}{3}r + \frac{1}{6}$ (iv) $3r - 1$ हो।

n पदों तक श्रेणियों का योग भी ज्ञात करो।

Also find the sum of the series for n terms.

Solution

(i) यहाँ rवाँ पद, $T_r = 2r - 1$

इसमें क्रम से $r = 1, 2, 3, ...$ लिखने पर,

$T_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$T_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$T_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

अतः अभीष्ट श्रेणी 1, 3, 5, ...है जो एक समान्तर श्रेढी है जहाँ $a = 1$ तथा $d = 3 - 1 = 2$ है। अतः

n पदों का योग,
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

(ii) rवाँ पद, $T_n = 2r + 1$

अतः

$T_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$T_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

$T_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$

अर्थात् अभीष्ट श्रेणी 3, 5, 7, ...है।

n पदों का योग,
$$S_n = \Sigma T_n = \Sigma(2n + 1)$$
$$= 2\Sigma n + \Sigma 1$$
$$= 2\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= n(n+1) + n$$
$$= n^2 + n + n = n^2 + 2n$$

(iii) यहाँ rवाँ पद, $T_r = \frac{1}{3}r + \frac{1}{6}$

उपर्युक्त में $r = 1, 2, 3,......$रखने पर,

$$T_1 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$T_2 = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$$
$$T_3 = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{6} = \frac{3}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$

अतः अभीष्ट श्रेणी $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, ...$ है।

n पदों का योग, $S_n = \Sigma T_n = \Sigma(\frac{1}{3}n + \frac{1}{6})$
$$= \frac{1}{3}\Sigma n + \frac{1}{6}\Sigma 1$$
$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n}{6}$$
$$= \frac{n}{6}(n + 1 + 1) = \frac{n(n+2)}{6}$$

(iv) यहाँ $T_r = 3r - 1$

$r = 1, 2, 3,.....$लिखने पर,

$T_1 = 3 \times 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

$T_2 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$

$T_3 = 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$

अतः अभीष्ट श्रेणी 2, 5, 8,.....है।

$a = 2, d = 3$

n पदों का योग, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1) \times 3]$$
$$= \frac{n}{2}(4 + 3n - 3)$$
$$= \frac{n(3n+1)}{2}$$

प्रश्नावली 1(E)

Problem 1

$(p-q)$ तथा $(p+q)$ के मध्य समान्तर माध्य लिखो।

Insert an arithmetic mean between $(p-q)$ and $(p+q)$.

Solution

माना कि $p-q$ तथा $p+q$ के मध्य समान्तर माध्य M है।

तब $M = \dfrac{(p-q)+(p+q)}{2} = \dfrac{2p}{2} = p$

Problem 2

दो राशियों 3 तथा 8 के मध्य एक समान्तर माध्य ज्ञात करो।

Insert an arithmetic mean between 3 and 8.

Solution

दो राशियों 3 तथा 8 के बीच समान्तर माध्य

$$M = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Problem 3

5 तथा 2 के बीच 5 समान्तर माध्य ज्ञात करो।

Insert 5 arithmetic means between 5 and 2.

Solution

यहाँ 5 तथा 2 के बीच 5 समान्तर माध्य ज्ञात करने हैं अत: श्रेणी के कुल पद $5 + 2 = 7$ होंगे।

पहला पद, $a = 5$ तथा अन्तिम पद, $T_7 = 2$

यदि सार्वन्तर d हो तो

$$T_n = a + (n-1)d$$
$$\Rightarrow \quad T_7 = 5 + (7-1)d$$
$$\Rightarrow \quad 2 = 5 + 6d$$
$$\Rightarrow \quad 6d = 2 - 5 = -3$$
$$\therefore \quad d = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

अत: अभीष्ट समान्तर माध्य हैं—

$$M_1 = a + d = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$
$$M_2 = a + 2d = 5 - 2 \times \frac{1}{2} = 4$$
$$M_3 = a + 3d = 5 - 3 \times \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$
$$M_4 = a + 4d = 5 - 4 \times \frac{1}{2} = 3$$
$$M_5 = a + 5d = 5 - 5 \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Problem 4

1 तथा 25 के बीच 11 समान्तर माध्य ज्ञात करो।

Insert 11 arithmetic means between 1 and 25.

Solution

क्योंकि 1 तथा 25 के बीच 11 समान्तर माध्य ज्ञात करने हैं अत: श्रेणी में $11 + 2 = 13$ पद होंगे।

जहाँ पहला पद, $a = 1$ तथा अन्तिम पद, $T_{13} = 25$

$$T_n = a + (n-1)d$$
$$\Rightarrow \quad T_{13} = 1 + (13-1)d$$
$$\Rightarrow \quad 25 = 1 + 12d$$
$$\Rightarrow \quad 12d = 25 - 1 = 24$$
$$\therefore \quad d = \frac{24}{12} = 2.$$

अभीष्ट माध्य हैं—

$a + d, a + 2d, ..., a + 10d, a + 11d$

अर्थात् $1 + 2, 1 + 4, ... 1 + 20, 1 + 22$

अथवा 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

Problem 5

20 तथा 80 के बीच n समान्तर माध्य इस प्रकार हैं कि प्रथम माध्य : अन्तिम माध्य $= 1 : 3$ तो n का मान ज्ञात करो।

There are n arithmetic means between 20 and 80 such that first mean : last mean $= 1 : 3$, find n.

Solution

क्योंकि 20 तथा 80 के बीच n समान्तर माध्य हैं। अत: पदों की संख्या $n + 2$ होगी। यदि सार्व अन्तर d हो तो

$N =$ पदों की संख्या $= N + 2$

$$T_n = a + (N-1)d$$
$$\Rightarrow \quad 80 = 20 + (n + 2 - 1)d$$
$$\Rightarrow \quad (n+1)d = 80 - 20 = 60$$
$$\therefore \quad d = \left(\frac{60}{n+1}\right)$$

अत: प्रथम माध्य $= a + d = 20 + \dfrac{60}{n+1} = \dfrac{20n + 20 + 60}{n+1}$

$$= \frac{20n + 80}{(n+1)}$$

अन्तिम माध्य [nवाँ माध्य अर्थात् $(n+1)$वाँ पद]

$$= a + (n + 1 - 1)d$$
$$= 20 + n \times \frac{60}{n+1} = \frac{20n + 20 + 60n}{n+1}$$
$$= \frac{80n + 20}{n+1}$$

प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$\frac{\text{प्रथम माध्य}}{\text{अन्तिम माध्य}} = \frac{1}{3} = \frac{(20n + 80)/(n+1)}{(80n + 20)/(n+1)}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{20n + 80}{80n + 20} = \frac{n + 4}{4n + 1}$, अंश तथा हर में 20 से भाग देने पर,

$\Rightarrow \quad 4n + 1 = 3(n + 4)$

$\Rightarrow \quad 4n + 1 = 3n + 12$

$\Rightarrow \quad 4n - 3n = 12 - 1$

$\therefore \quad n = 11$

वैकल्पिक विधि—मान लिया प्रथम माध्य m तथा nवाँ माध्य M है और सार्व अन्तर d है। अतः

$m - a = d$ तथा $T_n - M = d$

$\Rightarrow \quad m - a = T_n - M$

$\Rightarrow \quad m + M = T_n + a = 80 + 20$

$\Rightarrow \quad m + M = 100 \quad ....(1)$

प्रश्न के अनुसार,

$\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad 3m = M \quad ....(2)$

समीकरण (2) से M का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$m + 3m = 100$

$\Rightarrow \quad 4m = 100$

$\therefore \quad m = \frac{100}{4}$

अतः $\quad m - a = d$ से,

$d = 25 - 20 = 5$

अन्तिम पद, $\quad l = a + (n + 2 - 1)d$

$\Rightarrow \quad 80 = 20 + (n + 1) \times 5$

$\Rightarrow \quad 80 = 20 + 5n + 5$

$\Rightarrow \quad 5n = 80 - 20 - 5 = 55$

$\therefore \quad n = \frac{55}{5} = 11$

प्रश्नावली 1(F)

Problem 1

स.श्रे. के उन तीन पदों के मान ज्ञात कीजिए जिनका योग 12 तथा जिनके घनों का योग 408 है।

Find the three numbers in A.P. such that their sum is 12 and the sum of their cubes is 408.

Solution

मान लिया समान्तर श्रेढी के तीन पद $a - d, a, a + d$ हैं

अतः $\quad$ योग $= (a - d) + a + (a + d) = 12$

$\Rightarrow \quad 3a = 12$

$\therefore \quad a = \frac{12}{3} = 4 \quad ....(1)$

घनों का योग $= (a - d)^3 + a^3 + (a + d)^3$

$\Rightarrow \quad 408 = a^3 - 3a^2d + 3ad^2 - d^3 + a^3 + a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3$

$\Rightarrow \quad 408 = 3a^3 + 6ad^2$

$\Rightarrow \quad 408 = 3 \times 4^3 + 6 \times 4 \times d^2 \quad$ (a 4 रखने पर)

$\Rightarrow \quad 408 = 192 + 24d^2$

$\Rightarrow \quad 24d^2 = 408 - 192 = 216$

$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{216}{24} = 9$

$\therefore \quad d = \pm 3$

अतः तीन पद हैं : $4 - 3, 4, 4 + 3$ अर्थात् 1, 4, 7

या $4 + 3, 4, 4 - 3$ अर्थात् 7, 4, 1

Problem 2

यदि किसी स.श्रे. की तीन क्रमागत संख्याओं का योग 24 तथा उनका गुणनफल 440 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

If the sum of three numbers in A.P. is 24 and their product is 440, find the numbers.

Solution

मान लो समान्तर श्रेढी की 3 क्रमागत संख्याएँ $a - d, a, a + d$ हैं

अतः $\quad$ योग $= (a - d) + a + (a + d) = 24$

$\Rightarrow \quad 3a = 24$

$\therefore \quad a = \frac{24}{3} = 8 \quad ...(1)$

गुणनफल $= (a - d)a(a + d) = 440$

$\Rightarrow \quad a(a^2 - d^2) = 440 \quad$ ($a = 8$ रखने पर)

$\Rightarrow \quad 8 \times 64 - 8d^2 = 440$

$\Rightarrow \quad -8d^2 = 440 - 512 = -72$

$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{-72}{-8} = 9$

$\therefore \quad d = \pm 3$

$d = 3$ लेने पर तीन संख्याएँ हैं

$8 - 3, 8, 8 + 3$ अर्थात् 5, 8, 11

$d = -3$ लेने पर तीन संख्याएँ हैं।

$8 + 3, 8, 8 - 3$ अर्थात् 11, 8, 5

Problem 3

समान्तर श्रेढी में तीन संख्याओं का योग − 24 तथा गुणनफल 288 है। संख्याएँ बताओ।

The sum of three numbers in A.P. is −24 and their product is 288. Find the numbers.

Solution

माना कि समान्तर श्रेढी में तीन संख्याएँ $a - d, a, a + d$ हैं।

योग $= (a - d) + a + (a + d) = -24$

$\Rightarrow \quad 3a = -24$

$\therefore \quad a = -\frac{24}{3} = -8 \quad ...(1)$

गुणनफल $= (a - d)\,a\,(a + d) = 288$

$\Rightarrow \quad a(a^2 - d^2) = 288$

$\Rightarrow \quad -8[(-8)^2 - d^2] = 288 \quad$ ($a = -8$ लिखने पर)

$\Rightarrow \quad -8(64 - d^2) = 288$

$\Rightarrow \quad -512 + 8d^2 = 288$

$\Rightarrow \quad 8d^2 = 288 + 512 = 800$

$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{800}{8} = 100$

$\therefore \quad d = \pm 10$

$d = +10$, लेने पर तीन संख्याएँ

$-8 - 10, -8, -8 + 10$ अर्थात् $-18, -8, 2$ हैं।

$d = -10$, लेने पर तीन संख्याएँ

$-8 + 10, -8, -8 - 10$ अर्थात् $2, -8, -18$ हैं।

Problem 4

स. श्रे. में तीन संख्याओं का योग 15 है और प्रथम तथा अन्तिम का गुणनफल 21 है। संख्याएँ बताओ।

The sum of 3 numbers in A.P. is 15 and the product of the first and the last is 21. Find the numbers.

Solution

माना कि समान्तर श्रेढी में तीन संख्याएँ $a - d, a, a + d$ हैं।

योग $= (a - d) + a + (a + d) = 15$

$\Rightarrow \quad 3a = 15$

$\therefore \quad a = \frac{15}{3} = 5 \quad \ldots(1)$

प्रथम तथा अन्तिम का गुणनफल $= (a - d)(a + d) = 21$

$\Rightarrow \quad a^2 - d^2 = 21$

$\Rightarrow \quad -d^2 = 21 - a^2$

$\Rightarrow \quad -d^2 = 21 - 25 = -4$ (समीकरण (1) से a का मान रखने पर)

$\Rightarrow \quad d^2 = 4$

$\therefore \quad d = \pm 2$

$d = +2$ लेने पर तीन संख्याएँ

$5 - 2, 5, 5 + 2$ अर्थात् $3, 5, 7$ हैं।

$d = -2$ लेने पर तीन संख्याएँ

$5 + 2, 5, 5 - 2$ अर्थात् $7, 5, 3$ हैं।

Problem 5

स. श्रे. के चार क्रमिक पदों का योग 24 तथा गुणनफल 945 है। पदों के मान बताओ।

The sum of four consecutive terms of an A.P. is 24 and their product is 945. Find these terms.

Solution

मान लो चार क्रमिक पद $(a - 3d), (a - d), (a + d), (a + 3d)$ हैं।

योग $= (a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 24$

$\Rightarrow \quad 4a = 24$

$\therefore \quad a = \frac{24}{4} = 6 \quad \ldots(1)$

गुणनफल $= (a - 3d)(a - d)(a + d)(a + 3d) = 945$

$\Rightarrow \quad (a^2 - 9d^2)(a^2 - d^2) = 945$

$\Rightarrow \quad (36 - 9d^2)(36 - d^2) = 945$ ($a = 6$ रखने पर)

$\Rightarrow \quad 9(4 - d^2)(36 - d^2) = 945$

$\Rightarrow \quad (4 - d^2)(36 - d^2) = \frac{945}{9} = 105$

$\Rightarrow \quad 144 - 40d^2 + d^4 = 105$

$\Rightarrow \quad d^4 - 40d^2 + 144 - 105 = 0$

$\Rightarrow \quad d^4 - 40d^2 + 39 = 0$

$\Rightarrow \quad d^4 - 39d^2 - d^2 + 39 = 0$

$\Rightarrow \quad d^2(d^2 - 39) - 1(d^2 - 39) = 0$

$\Rightarrow \quad (d^2 - 39)(d^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad d^2 = 1$ क्योंकि $d^2 = 39$ पूर्ण वर्ग नहीं है।

$\therefore \quad d = \pm 1$

अतः संख्याएँ 3, 5, 7, 9 या 9, 7, 5, 3 होंगी।

Problem 6

20 को ऐसे चार भागों में विभाजित कीजिए जो स. श्रे. में हों तथा जिनके पहले और चतुर्थ पदों के गुणनफल का अनुपात दूसरे और तीसरे पदों के गुणनफल से 2 : 3 है।

Divide 20 into 4 parts which are in A.P. and such that the product of first and fourth is to the product of the second and third in the ratio 2 : 3.

Solution

मान लिया 20 के चार भाग जो समान्तर श्रेढी में हों, $a - 3d, a - d, a + d$ तथा $a + 3d$ हैं।

अतः $(a - 3d) + (a + d) + (a + d) + (a + 3d) = 20$

$\Rightarrow \quad 4a = 20$

$a = \frac{20}{4} = 5 \quad \ldots(1)$

पहले और चतुर्थ का गुणनफल $= (a - 3d)(a + 3d) = a^2 - 9d^2$

दूसरे और तीसरे का गुणनफल $= (a - d)(a + d) = a^2 - d^2$

अतः $\quad \frac{a^2 - 9d^2}{a^2 - d^2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad 3(a^2 - 9d^2) = 2(a^2 - d^2)$

$\Rightarrow \quad 3a^2 - 27d^2 = 2a^2 - 2d^2$

$\Rightarrow \quad -27d^2 + 2d^2 = 2a^2 - 3a^2$

$\Rightarrow \quad -25d^2 = -a^2 = -25 \quad (\because a = 5)$

$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{-25}{-25} = 1$

$\therefore \quad d = \pm 1$

$d = +1$ लेने पर चार भाग

$5 - 3, 5 - 1, 5 + 1, 5 + 3$ अर्थात् $2, 4, 6, 8$ हैं।

$d = -1$ लेने पर चार भाग

$5 + 3, 5 + 1, 5 - 1, 5 - 3$ अर्थात् $8, 6, 4, 2$ हैं।

Problem 7

तीन अंकों वाली संख्या के तीनों अंकों का योग 12 है तथा उसके तीन अंक स. श्रे. में हैं। यदि अंकों को उलट दिया जाय तो संख्या में 396 की कमी हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।

The sum of the digits of a three digit number is 12 and the digits are in A.P. If the digits are reversed, then the number is diminished by 396. Find the number.

Solution

मान लिया तीन अंकों की संख्या में सैकड़े का अंक $a - d$ दहाई का अंक a तथा इकाई का अंक $a + d$ है।

$$\text{अंकों का योग} = (a - d) + a + (a + d) = 12$$

$$\Rightarrow \quad 3a = 12$$

$$a = \frac{12}{3} = 4 \qquad \ldots(1)$$

$$\text{पुरानी संख्या} = 100(a - d) + 10a + (a + d) = 111a - 99d$$

$$\text{नयी संख्या} = 100(a + d) + 10a + (a - d) = 111a + 99d$$

पुरानी संख्या − नयी संख्या = 396, ज्ञात है

$$\Rightarrow \quad 111a - 99d - (111a + 99d) = 396$$

$$\Rightarrow \quad -198d = 396$$

$$\therefore \quad d = \frac{396}{-198} = -2$$

$$\text{सैकड़े का अंक} = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

$$\text{दहाई का अंक} = 4$$

$$\text{इकाई का अंक} = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2$$

$$\text{अभीष्ट संख्या} = 642$$

Problem 8

तीन संख्याएँ 3 : 7 : 9 के अनुपात में हैं। यदि दूसरी संख्या में से 5 घटा दिया जाय तो वे स. श्रे. में हो जाती हैं। मूल संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

The three numbers are in the ratio 3 : 7 : 9. If 5 is subtracted from the second, the resulting numbers form an A.P. Find the original numbers.

Solution

माना कि तीन संख्याएँ $3x$, $7x$ तथा $9x$ हैं।

दूसरी संख्या में से 5 घटाने पर संख्या $7x - 5$ रह जाती हैं।

अब $3x$, $(7x - 5)$ तथा $9x$ स. श्रे. में हैं

$$\Rightarrow \quad (7x - 5) - 3x = 9x - (7x - 5)$$

$$\Rightarrow \quad 7x - 5 - 3x = 9x - 7x + 5$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 2x + 5$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 2x = 5 + 5$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 10$$

$$\therefore \quad x = \frac{10}{2} = 5$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $3 \times 5, 7 \times 5, 9 \times 5$

अर्थात् 15, 35, 45 हैं।

प्रश्नावली 1(G)

Problem 1

20 व्यक्तियों को इनाम प्रदान करने हैं जहाँ प्रत्येक व्यक्ति अपने से पहले व्यक्ति से ₹ 2 अधिक प्राप्त करता है। यदि पहले व्यक्ति को ₹ 2 मिले हों तो इनाम की कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

20 persons are to be awarded prizes so that every person gets 2 rupees more than the previous person gets. If the first person gets ₹ 2, find the total amount spent on the prizes.

Solution

पहले व्यक्ति को मिली धनराशि = ₹ 2

दूसरे व्यक्ति को मिली धनराशि = 2 + 2 = ₹ 4

तीसरे व्यक्ति को मिली धनराशि = 4 + 2 = ₹ 6

....

इस प्रकार 20 व्यक्तियों को मिली धनराशियाँ 2, 4, 6, ...20 पदों तक स. श्रे. में हैं जहाँ पहला पद a 2 तथा सार्व अन्तर $d = 2$ है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\Rightarrow \quad S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 2 + (20 - 1) \times 2]$$

$$= 10(4 + 19 \times 2) = 10(4 + 38)$$

$$= 10 \times 42 = 420$$

अर्थात् इनाम की कुल धनराशि = ₹ 420

Problem 2

कोई व्यक्ति प्रथम माह में ₹ 20 बचाता है, दूसरे माह में ₹ 30 बचाता है, तीसरे माह में ₹ 40 बचाता है तथा इसी प्रकार पाँच वर्ष तक बचाता है। पाँच वर्ष की कुल बचत ज्ञात कीजिए।

A man saves ₹ 20 in the first month, ₹ 30 in the second month, ₹ 40 in the third month and so on. Find the total amount saved in 5 years.

Solution

पहले माह की बचत ₹ 20, दूसरे माह की बचत ₹ 30, तीसरे माह की बचत ₹ 40, ...एक स. श्रे. में हैं। जहाँ $a = 20$ तथा $d = 30 - 20 = 10$ है।

5 वर्ष = 5 × 12 = 60 माह अर्थात् $n = 60$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\Rightarrow \quad S_{60} = \frac{60}{2}[2 \times 20 + (60 - 1) \times 10]$$

$$= 30[40 + 590]$$

$$= 30 \times 630 = 18{,}900$$

अर्थात् पाँच वर्ष की कुल बचत = ₹ 18,900

Problem 3

कोई व्यक्ति प्रथम माह में ₹ 50, दूसरे माह में ₹ 80, तीसरे माह में ₹ 110 तथा इसी प्रकार प्रत्येक माह बचाता है। पाँच वर्ष में उसने कितनी राशि बचा ली ?

A man saves ₹ 50 in first month, ₹ 80 in the second month, ₹ 110 in the third month and so on. How much did he save in 5 years ?

Solution

यहाँ $a = 50, d = 80 - 50 = 30, n = 5 \times 12 = 60$

$$S_{60} = \frac{60}{2}[2 \times 50 + (60 - 1) \times 30]$$
$$= 30(100 + 59 \times 30)$$
$$= 30(100 + 1770) = 30 \times 1870 = 56{,}100$$

अर्थात् पाँच वर्ष की कुल बचत = ₹ 56,100

Problem 4

कोई व्यक्ति प्रथम वर्ष में ₹ 32 बचाता है, दूसरे वर्ष में ₹ 36 और इस प्रकार वह अपनी बचत प्रतिवर्ष ₹ 4 बढ़ाता है। बताइए कितने वर्षों के बाद में उसकी बचत ₹ 200 हो जायेगी ?

A man saves ₹ 32 during the first year, ₹ 36 in the second year and in this way he increases his savings by ₹ 4 every year. Find in what time his savings will be ₹ 200.

Solution

स्पष्ट है कि व्यक्ति की प्रतिवर्ष बचत एक स.श्रे. में है जिसका पहला पद, $a = 32$ तथा सार्व अन्तर, $d = 4$ है।

मान लो उसकी n वर्ष की बचत ₹ 200 है।

अतः $S_n = 200$

$\Rightarrow$ $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$\Rightarrow$ $200 = \frac{n}{2}[2 \times 32 + (n - 1) \times 4]$

$\Rightarrow$ $200 = \frac{n}{2}[64 + 4n - 4] = \frac{n}{2}[60 + 4n]$

$\Rightarrow$ $200 \times 2 = 60n + 4n^2$

$\Rightarrow$ $4n^2 + 60n - 400 = 0$

$\Rightarrow$ $n^2 + 15n - 100 = 0$ {4 से भाग देने पर}

$\Rightarrow$ $n^2 + 20n - 5n - 100 = 0$

$\Rightarrow$ $n(n + 20) - 5(n + 20) = 0$

$\Rightarrow$ $(n + 20)(n - 5) = 0$

$\therefore$ $n = 5$ क्योंकि $n = -20$ असम्भव है।

अर्थात् वह व्यक्ति 5 वर्ष बाद 200 रु. की बचत कर लेगा।

Problem 5

एक व्यक्ति ₹ 3,600 का ऋण 40 वार्षिक किस्तों में चुकाना चाहता है जो एक स.श्रे. बनाती हैं। जब 30 किस्तों के चुकाने के पश्चात् उसकी मृत्यु हो जाती है तो एक-तिहाई ऋण बिना चुकाये शेष रह जाता है। ज्ञात कीजिए कि पहली किस्त कितने रुपये की थी ?

A man agrees to payoff a debt of ₹ 3,600 by 40 annual instalments which form in A.P. When 30 of the instalments are paid he dies leaving one-third of the debt unpaid. Find the value of the first instalment.

Solution

मान लो पहली किस्त a थी और स.श्रे. का सार्व अन्तर d था।

अतः $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$\Rightarrow$ $S_{40} = \frac{40}{2}[2a + (40 - 1)d]$

$\Rightarrow$ $3600 = 20(2a + 39d)$

$\Rightarrow$ $2a + 39d = \frac{3600}{20} = 180$ ...(1)

30 किस्तें चुकाने के पश्चात् शेष ऋण = 3600 का $\frac{1}{3}$

$= 3600 \times \frac{1}{3} =$ ₹ 1200

अतः 30 किस्तों में चुकाया गया ऋण = 3600 − 1200 = ₹ 2400

अतः $S_{30} = \frac{30}{2}[2a + (30 - 1)d]$

$\Rightarrow$ $2400 = 15(2a + 29d)$

$\Rightarrow$ $2a + 29d = \frac{2400}{15} = 160$ ...(2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$2a + 39d = 180$$
$$2a + 29d = 160$$
$$- \quad - \quad\quad -$$
$$10d = 20$$

$\therefore$ $d = \frac{20}{10} = 2$

d के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$2a + 39 \times 2 = 180$

$\Rightarrow$ $2a = 180 - 78 = 102$

$\therefore$ $a = \frac{102}{2} = 51$

अर्थात् पहली किस्त ₹ 51 की थी।

Problem 6

एक व्यक्ति ₹ 4,860 का ऋण 10 वार्षिक किस्तों में चुकाने का इन्तजाम करता है। ये किस्तें एक स.श्रे. में हैं जहाँ किस्त में वार्षिक वृद्धि ₹ 24 है। उसकी पहली किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

A man arranged to payoff a debt of ₹ 4,860 by 10 instalments which are in A.P. If he increases his instalments by ₹ 24 annually, find the value of his first instalment.

Solution

10 वार्षिक किस्तें स.श्रे. में हैं जिसका योग 4860 है तथा $d = 24$ है। माना कि पहला पद $= a$ है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$\Rightarrow$ $4860 = \frac{10}{2}[2a + (10 - 1) \times 24]$

$\Rightarrow$ $4860 = 5(2a + 9 \times 24)$

$\Rightarrow$ $4860 = 5(2a + 216) = 10a + 1080$

$\Rightarrow$ $10a = 4860 - 1080 = 3780$

$\therefore$ $a = \frac{3780}{10} = 378$

अर्थात् पहली किस्त ₹ 378 की है।

Problem 7

एक व्यक्ति ₹ 3,250 का ऋण मासिक किस्तों के रूप में चुकाता है। प्रथम वर्ष में ₹ 20 की किस्त देने के पश्चात् ₹ 15 मासिक किस्त की राशि बढ़ाता जाता है। पूरा ऋण चुकाने में कितने महीने लगेंगे ?

A man repays a loan of ₹ 3,250 by paying ₹ 20 in the first month and then increases the payment by ₹ 15 every month. How long will it take to clear his loan ?

Solution

मासिक किस्त एक स.श्रे. में है जिसका पहला पद $a = 20, d = 15$ तथा योग $= 3250$ है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 3250 = \frac{n}{2}[2 \times 20 + (n-1) \times 15]$$

$$\Rightarrow \quad 3250 = \frac{n}{2}[40 + 15n - 15] = \frac{n}{2}(25 + 15n)$$

$$\Rightarrow \quad 3250 \times 2 = n(25 + 15n)$$

$$\Rightarrow \quad 15n^2 + 25n - 6500 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3n^2 + 5n - 1300 = 0 \qquad \text{(5 से भाग देने पर)}$$

$$\Rightarrow \quad 3n^2 - 60n + 65n - 1300 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3n(n-20) + 65(n-20) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n-20)(3n+65) = 0$$

$\therefore \; n = 20$ क्योंकि $n = -\frac{65}{3}$ असम्भव है।

अतः वह व्यक्ति 20 महीने में ऋण चुका देगा।

Problem 8

'ब' ₹ 4,800 का ऋण 24 मासिक किस्तों में चुकाना चाहता है जो एक स.श्रे. बनाती है। 20 किस्तें चुकाने के बाद 'ब' दिवालिया हो जाता है तथा ऋणदाता पाता है कि अभी ₹ 1,200 ऋण शेष रह गया है। पहली चार किस्तों की धनराशियाँ ज्ञात कीजिए।

B arranges to payoff a debt of ₹ 4,800 in 24 monthly instalments which form an A.P. After 20 instalments *B* becomes insolvent and his creditor finds that ₹ 1,200 still remains unpaid. Find the value of each of the first four instalments.

Solution

मासिक किस्त स.श्रे. में हैं जिसका $n = 24, S_n = 4800$ है

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 4800 = \frac{24}{2}[2a + (24-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 4800 = 12(2a + 23d)$$

$$\Rightarrow \quad 2a + 23d = \frac{4800}{12} = 400 \qquad \text{....(1)}$$

20 किस्तें चुकाने के बाद शेष ऋण = ₹ 1200

$\therefore$ 20 किस्तों में चुकाया गया ऋण = 4800 – 1200 = ₹ 3600

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a + (20-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 3600 = 10(2a + 19d)$$

$$\Rightarrow \quad 2a + 19d = \frac{3600}{10} = 360$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$\begin{array}{r} 2a + 23d = 400 \\ 2a + 19d = 360 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline 4d = 40 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{40}{4} = 10$$

समीकरण (1) में d का मान रखने पर,

$$2a + 23 \times 10 = 400$$

$$\Rightarrow \quad 2a = 400 - 230 = 170$$

$$\therefore \quad a = \frac{170}{2} = 85$$

अतः पहली चार किस्तों की धनराशियाँ

$a, a + d, a + 2d, a + 3d$

अर्थात् ₹ 85, ₹ 95, ₹ 105, ₹ 115 हैं।

Problem 9

किसी ट्यूबवेल के लिए प्रथम 100 फुट की लागत ₹ 2.50 प्रति फुट है तथा उसके बाद प्रत्येक एक फुट पर ₹ 0.25 अतिरिक्त लागत है। अन्तिम फुट की लागत तथा कुल लागत बताइए यदि ट्यूबेल की गहराई 220 फुट हो।

The cost of drilling a Tubewell is ₹ 2.50 per foot for the first 100 feet and an additional ₹ 0.25 for every subsequent foot. Find the cost of the last foot and the total cost of 220 feet deep Tubewell.

Solution

प्रथम 100 फुट के लिए लागत ₹ 2.50 प्रति फुट है।

प्रथम 100 फुट के लिए कुल लागत = 100 × 2.50 = ₹ 250 ....(1)

ट्यूबवेल की गहराई 220 फुट है

अतः 220 – 100 = 120 फुट की लागत प्रति फुट एक स.श्रे. में हैं जिसका पहला पद 2.50 + 0.25 = 2.75 तथा सार्व अन्तर $d = 2.5$ है।

अतः अन्तिम फुट की लागत,

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$T_{120} = 2.75 + (120 - 1) \times 0.25$$

$$= 2.75 + 119 \times 0.25$$

$$= 2.75 + 29.75 = 32.50 \qquad \text{....(2)}$$

तथा
$$S_{120} = \frac{120}{2}[a + T_{120}]$$

$$\Rightarrow \quad S_{120} = 60[2.75 + 32.50] = 60 \times 35.25 = 2115.00 \qquad \text{....(3)}$$

अतः ट्यूबवेल की कुल लागत = 250 + 2,115 = ₹ 2365

$\therefore$ अन्तिम फुट की लागत = ₹ 32.50; कुल लागत = ₹ 2365

Problem 10

दस वर्षों में एक व्यक्ति ₹ 16,500 बचाता है। प्रथम वर्ष के उपरान्त अगले प्रत्येक वर्ष में पिछले वर्ष की तुलना में वह ₹ 100 अधिक बचाता है। बताओ उसने प्रथम वर्ष में कितना रुपया बचाया ?

A man saved ₹ 16,500 in ten years. In each year after the first he saved ₹ 100 more than he did in the preceding year. How much did he saved in the first year ?

Solution

मान लिया प्रथम वर्ष में ₹ a बचाता है।

$$n = 10, d = 100, S_{10} = 16{,}500$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$16{,}500 = \frac{10}{2}[2a + (10 - 1)\,100]$$

$$16{,}500 = 5[2a + 900]$$

$$2a + 900 = \frac{16500}{5}$$

$$2a + 900 = 3300$$

$$2a = 3300 - 900$$

$$2a = 2400$$

$$a = 1{,}200$$

$\therefore$ व्यक्ति ने प्रथम वर्ष में ₹ 1,200 बचाया।

…………….

The end

…………….